Sommation par paquets des séries numériques

<u>Définition</u> : Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série ($u_n \in \mathbb{C}$) et soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers. La série $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ où $v_1 = u_1 + \dots + u_{p_1}$, $v_2 = u_{p_1+1} + \dots + u_{p_2}, \dots, v_k = u_{p_{k-1}+1} + \dots + u_{p_k}, \dots$ est dite obtenue à partir de la série initiale <u>en sommant par paquets</u> de longueur $p_k - p_{k-1}$

<u>Proposition</u> (connue) Si la série $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge, toute série $v = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ obtenue en sommant u par paquets, est convergente et de même somme que u.

<u>Remarque</u> : Si <u>une</u> série sommée par paquets converge cela n'implique pas en général que la série initiale converge (sauf si elle est à termes ≥ 0). Par exemple $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ diverge bien que la sommation par paquets de longueur 2 donne $(-1+1)+(-1+1)+\dots = 0+0+\dots = 0$

<u>Problème</u> : Trouver des conditions suffisantes (simples) qui assurent (pour les séries à termes quelconques) que si on trouve <u>une</u> sommation par paquets qui converge alors la série initiale converge vers la même somme. Voici deux résultats utiles :

> <u>Proposition 1</u> : Avec les notations de la définition, si $\lim u_n = 0$, si la suite $p_k - p_{k-1}$ est bornée et si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ converge alors $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge aussi vers la même somme.

<u>dém^{n}</u> : On peut supposer que les paquets sont de longueur constante égale à ℓ ($p_k - p_{k-1} = \ell$) sinon on peut toujours se ramener à ce cas en intercalant des termes nuls. On a

$v_1 = u_1 + \dots + u_\ell$, $v_2 = u_{\ell+1} + \dots + u_{2\ell}, \dots, v_k = u_{(k-1)\ell+1} + \dots + u_{k\ell}$. Posons

$U_n = u_1 + \dots + u_n$, $V_k = v_1 + \dots + v_k (= U_{k\ell})$. Par hypothèse il existe $V (\in \mathbb{C})$ tel que $V_k \to V$ ($k \to +\infty$). Pour n quelconque, il existe des entiers k_n et r_n tels que

$$n = k_n \ell + r_n \quad (0 \leq r_n < \ell). \text{ On a alors}$$

$$U_n = V_{k_n} + \delta_n \quad \text{avec } \delta_n = u_{k_n\ell+1} + \dots + u_{k_n\ell + r_n}.$$

Si $n \to +\infty$, $k_n \to +\infty$, $V_{k_n} \to V$ et $\delta_n \to 0$ (comme somme d'un nombre borné de suites tendant vers zéro). Donc $U_n \to V$ <u>cqfd</u>

Exemple : la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$ n'est pas absolument convergente ($|u_n| \sim \frac{1}{n}$) et n'est pas une série alternée ($|u_{2p}| > |u_{2p-1}|$).
Comme $u_n \to 0$, elle est de même nature que la série de terme général $v_k = u_{2k-1} + u_{2k} = \frac{-1}{2k(2k-1)}$ qui est convergente ($v_k \sim -\frac{1}{4k^2}$)

Proposition 2 (avec les notations de la définition) Si $u_n \in \mathbb{R}$, si les paquets sont composés de termes tous de même signe et si $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ converge alors $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge vers la même somme.

démⁿ : Pour tout entier n, il existe un entier $k(n)$ tel que $P_{k(n)} < n < P_{k(n)+1}$ et $k(n) \to +\infty$ ($n \to +\infty$). On a alors

$$U_n = V_{k(n)} + u_{P_{k(n)}+1} + u_{P_{k(n)}+2} + \dots + u_n$$

Mais $|u_{P_{k(n)}+1} + u_{P_{k(n)}+2} + \dots + u_n| \leq |v_{P_{k(n)+1}}|$ car les u_i qui interviennent dans la somme sont de même signe. Ainsi $|U_n - V_{k(n)}| \leq |v_{P_{k(n)+1}}| \to 0$ quand $n \to +\infty$ (la série des v_k converge) donc $U_n \to V$ ($n \to +\infty$) cqfd.

Exemple : la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1/2$.

($[\sqrt{n}]$ désigne la partie entière de $\sqrt{n}$) : considérons la sommation par paquets $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{(-1)^k}{n^\alpha} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_k$ où $I_k = \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{1}{n^\alpha}$

on vérifie sans peine que I_k est une suite décroissante si $\alpha > 0$ et

$$\int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{dx}{x^\alpha} \leq I_k \leq \int_{k^2-1}^{k^2+2k} \frac{dx}{x^\alpha}$$

(si $\alpha \leq 0$, $I_k \geq 1$ donc la série diverge)

On trouve ainsi $I_k \sim \frac{1}{1-\alpha} k^{2(1-\alpha)} \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2(1-\alpha)} - 1 \right)$ ($k \to +\infty$)

Posant $\beta = 2(1-\alpha)$ et utilisant $\left(1+\frac{1}{k}\right)^\beta - 1 = \beta \frac{1}{k} + \frac{\beta(\beta-1)}{2!} \frac{1}{k^2} + \dots$, on voit que $I_k \sim \frac{1}{1-\alpha} \beta k^{\beta-1}$ ($k \to +\infty$). Donc si

$\beta - 1 \geq 0$ ($\iff \alpha \leq 1/2$) I_k ne tend pas vers zéro et la série diverge

si $\beta - 1 < 0$ ($\iff \alpha > 1/2$) $I_k \to 0$ en décroissant et la série $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_k$ est une série alternée donc convergente. D'après la proposition 2 on a le résultat annoncé.

Référence pour l'exercice : Ramis - Deschamps - Odoux